Fritz Ostermann 20. 09. 2016

Elemente der Raumeinheit (RE) im n-dimensionalen kartesischen Vektorraum

$\mathbb{R}^1$ $= < e_1 >_{|\mathbb{R}}$
Ursprung O

Anzahl der Ecken: 2

Begründung: O, E_1, wobei $e_1 = \overrightarrow{OE_1}$ ist.

Anzahl der Kanten: 1

Summe der Gebilde: 2 + 1 = 3
Alternierende Summe: 2 – 1 = 1

$\mathbb{R}^2$ $= < e_1,e_2 >_{|\mathbb{R}}$
Ursprung: O

Anzahl der Ecken: 4

Begründung: Die 4 Ecken ergeben sich, indem man alle möglichen Summen der Vektoren e_1,e_2 mit verschiedenen Summanden an den Ursprung anträgt,
(2über0) + (2über1) + (2über2) = 2^4.

Anzahl der Kanten: 4
= (2über1)·4:2

Begründung: jede der 4 Ecken haben Kontakt mit 2 Kanten. Jede Kante hat 2 Eckpunkte und wird – ausgehend von den 4 Ecken – doppelt gezählt, d.h. 2·4Kanten :2 = 4Kanten.

Anzahl der Quadrate: 1
= (2über2)·4:4

Begründung: von jeder Ecke wird ein Quadrat aufgespannt Das Quadrat hat 4 Ecken. Jedes Quadrat wird also 4-fach gezählt. Damit hat man 4·1Quadrat:4 = 1Quadrat.

Summe der Gebilde: 4 + 4 + 1 = 9
Alternierende Summe : 4 – 4 +1 = 1

$\mathbb{R}^3$ $= < e_1,e_2,e_3 >_{|\mathbb{R}}$
Ursprung: O

Anzahl der Ecken: 8

Begründung: (3über0) + (3über1) + (3über2) + (3über3) = 2^3.

Anzahl der Kanten: 12
= (3über1)·8:2

Begründung: von jeder Ecke gehen 3 Kanten aus. Jede Kante hat 2 Endpunkte, wird also doppelt gezählt: 8·3Kanten:2 = 12.

Anzahl der Quadrate: 6
(3über2)·8:4

Begründung: von jeder Ecke gehen 3 Kanten aus und je 2 Kanten bestimmen 1 Quadrat, also gibt es (3über2) = 3 Quadrate, die Kontakt mit einer Ecke haben. Ein Quadrat hat 4 Ecken, wird also 4-fach gezählt, damit hat man 8·3Quadrate:4 = 6Quadrate.

Anzahl der Quader: 1

= (3über3)·8:8

Es zeigt sich der Eulersche Polyedersatz des Würfels:
Ecken + Flächen = Kanten + 2
8 + 6 = 12 + 2

Summe der Gebilde: 8 + 12 + 6 + 1 = 27
Alternierende Summe : 8 – 12 + 6 – 1 = 1

$\mathbf{R}^4 = < e_1, e_2, e_3, e_4 >|_R$
Ursprung: O

Anzahl der Ecken: 16

Begründung: (4über0) + ... + (4über4) = 2^4.

Anzahl der Kanten: 32
= (4über1)·16:2

Begründung: von jeder Ecke gehen 4 Kanten aus. Jede Kante hat 2 Endpunkte, wird also doppelt gezählt: 16·4Kanten:2 = 32.

Anzahl der Quadrate: 24
= (4über2)·16:4

Begründung: Jede Ecke hat Kontakt mit (4über2) = 6 Quadraten, also 16·6Quadrate = 96Quadrate. Jedes Quadrat zählt 4-fach, also hat man 24 Quadrate.

Anzahl der Würfel: 8
= (4über3)·16:8

Begründung: Jede Ecke hat Kontakt mit (4über3) = 4 Würfel, also 16·4Würfel = 64Würfel. Jeder Würfel hat 8 Ecken, also hat man 64Würfel:8 = 8Würfel.

Anzahl der RE4: 1
= (4über4)·16:16

Summe der Gebilde: 16 + 32 + 24 + 8 + 1 = 81
Alternierende Summe : 16 – 32 + 24 – 8 + 1 = 1

Für die Ecken, Kanten, Quadrate und der rechtwinkligen Raumeinheiten gilt offenbar:

$\mathbf{R}^2$
Ecken – Kanten + Flächen = 1
4((2über0)2^{-0} – (2über1)2^{-1} + (2über2)2^{-2}) = 1
(2über0)2^2 – (2über1)2^1 + 1 = 1
(2über0)2^2 – (2über1)2^1 = 0

$\mathbf{R}^3$
Ecken – Kanten + Flächen – Quader = 1
8((3über0)2^{-0} – (3über1)2^{-1} + (3über2)2^{-2} – (3über3)2^{-3}) = 1
(3über0)2^3 – (3über1)2^2 + (3über2)2 – 1 = 1
(3über0)2^3 – (3über1)2^2 + (3über2)2 = 2

$\mathbf{R^4}$

Ecken – Kanten + Flächen – Quader + RE4 = 1

$16((4 \text{über} 0)2^{-0} - (4 \text{über} 1)2^{-1} + (4 \text{über} 2)2^{-2} - (4 \text{über} 3)2^{-3} + (4 \text{über} 4)2^{-4}) = 1$

$(4 \text{über} 0)2^4 - (4 \text{über} 1)2^3 + (4 \text{über} 2)2^2 - (4 \text{über} 3)2 + 1 = 1$

$(4 \text{über} 0)2^4 - (4 \text{über} 1)2^3 + (4 \text{über} 2)2^2 - (4 \text{über} 3)2 = 0$

$\mathbf{R^n}$

$\mathbf{2^n}\sum(-1)^\nu(n \text{ über } \nu)2^{-\nu} = 1, \quad 0 \leq \nu \leq n$ Euler Charakteristik der Raumeinheit REn

Multipliziert man die Summe mit $\mathbf{2^n}$ und bringt man das letzte Glied der Summe auf die rechte Seite erhält man für gerade n den Wert 0 und für ungerade n den Wert 2.

Allgemeine Formeln für die Summe bzw. die alternierende Summe der Gebilde:

Summe der Gebilde:

$(2 + 1)^n = (2 \text{über} 0)2^n + (2 \text{über} 1)2^{n-1} + ... + (n \text{ über} \nu)2^{n-\nu} + ... + (n \text{ über } n)2^0 = 3^n \quad (F_n)$

Alternierende Summe der Gebilde:

$(2 - 1)^n = (2 \text{über} 0)2^n - (2 \text{über} 1)2^{n-1} + ... + (-1)^\nu (n \text{ über} \nu)2^{n-\nu} + ... + (-1)^\nu(n \text{ über } n)2^0 = 1 \quad (F_n{}^*)$

Spezielle Summen der Gebilde für

n = 1: $(2 + 1)^1 = 3$

n = 2: $(2 + 1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 = 9$

n = 3: $(2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1^1 + 3 \cdot 2^1 \cdot 1^2 + 1^3 = 27$

n = 4: $(2 + 1)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot 1^1 + 6 \cdot 2^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^1 \cdot 1^3 + 1^4 = 81$

Spezielle alternative Summen der Gebilde für

n = 1: $(2 - 1)^1 = 1$

n = 2: $(2 - 1)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 = 1$

n = 3: $(2 - 1)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1^1 + 3 \cdot 2^1 \cdot 1^2 - 1^3 = 1$

n = 4: $(2 - 1)^4 = 2^4 - 4 \cdot 2^3 \cdot 1^1 + 6 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 2^1 \cdot 1^3 + 1^4 = 1$

Zur Historie

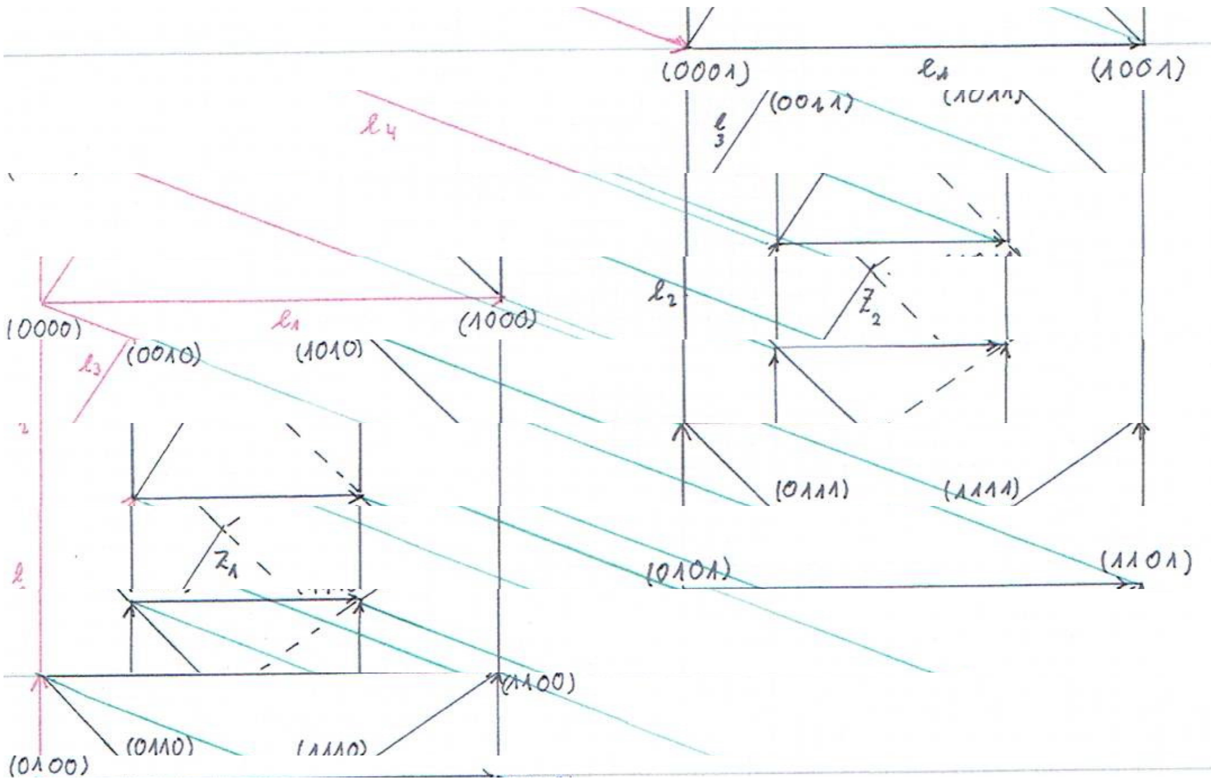
Wie mir Arnold Schönhage mitteilte, wurde die mit kombinatorischen Schlüssen hergeleitete und topologisch interpretierte Erweiterung (F*) der Eulerschen Formel im $\mathbf{R^3}$ auf n-dimenionale Räume bereits 1852 von dem Schweizer Mathematiker Schläfli veröffentlicht.
Man findet sie bei:
Coxeter „Regular Polytopes" Chapter IX Poincare's Proof Of Euler's Formula.
Schläfli gibt sie in folgenden Formen an:

$N_0 - N_1 + N_2 - ... + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^n$ oder

$N_0 - N_1 + N_2 - ... + (-1)^{n-1} N_{n-1} + (-1)^n N_n = 1$

Zudem empfiehlt Arnold Schönhage einen Artikel aus
J. Dieudenne „ Geschichte der Mathematik 1700 – 1800" Vieweg 1985 Seiten 646-647, in dem über die Historie des Eulerschen Polyedersatzes berichtet wird.

Projektionsbild der Elemente einer 4-dimensionalen Raumeinheit



Die RE4 besteht aus $2 \cdot 8 = 16$ Punkten,

$a(4,1) = 2 \cdot 12 + 8 = 32$ Kanten $= 2^{4-1} \cdot (4\text{über}1)$,

- die 8 Kanten sind die in den 8 Punkten des Würfels [(0,0,0,0),< e_1 e_2 e_3, >] angesetzten Vektoren e_4 -

$a(4,2) = 2 \cdot 6 + 12 = 24$ Quadrate $= 2^{4-2} \cdot (4\text{über}2)$,

- die 12 Quadrate werden von den 12 Kanten des Würfels [(0,0,0,0),< e_1 e_2 e_3, >] jeweils zusammen mit e_4 gebildet -

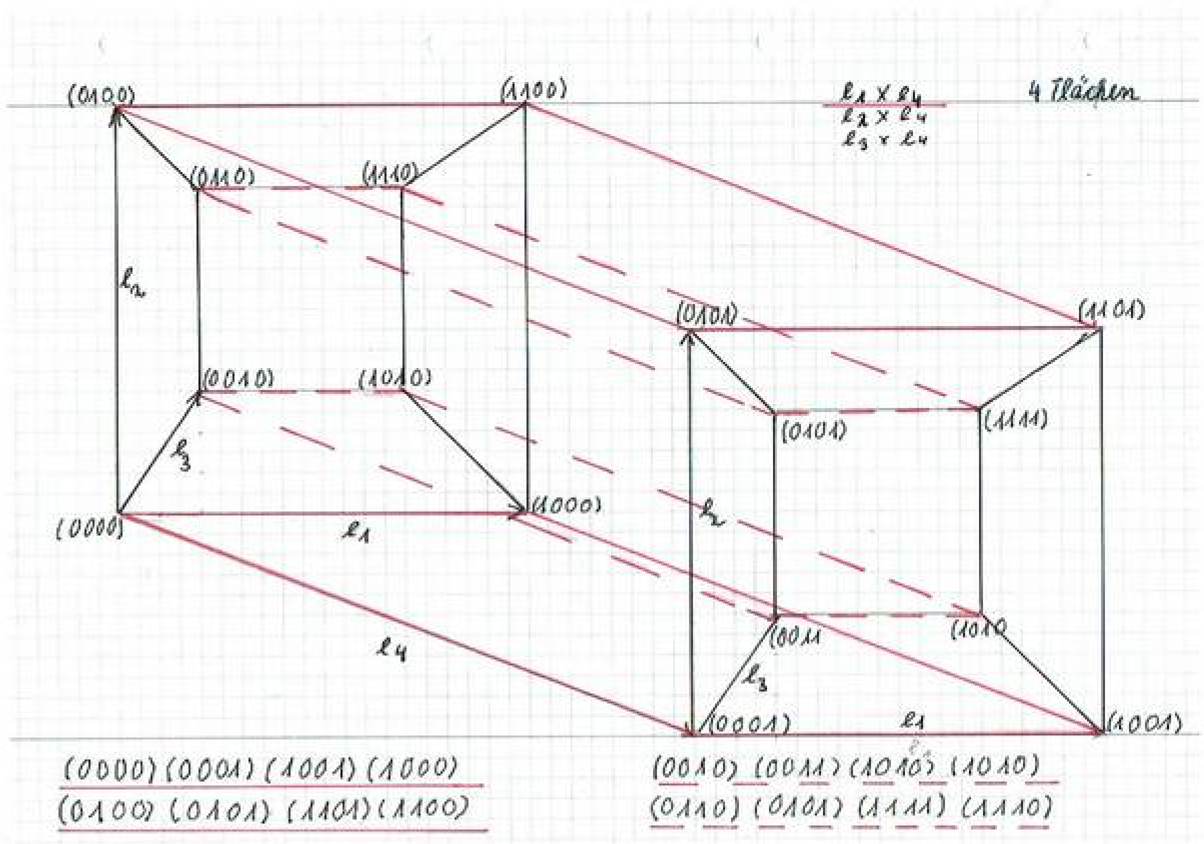
$a(4,3) = 2 \cdot 1 + 6 = 8$ Würfel $= 2^{4-3} \cdot (4\text{über}3)$,

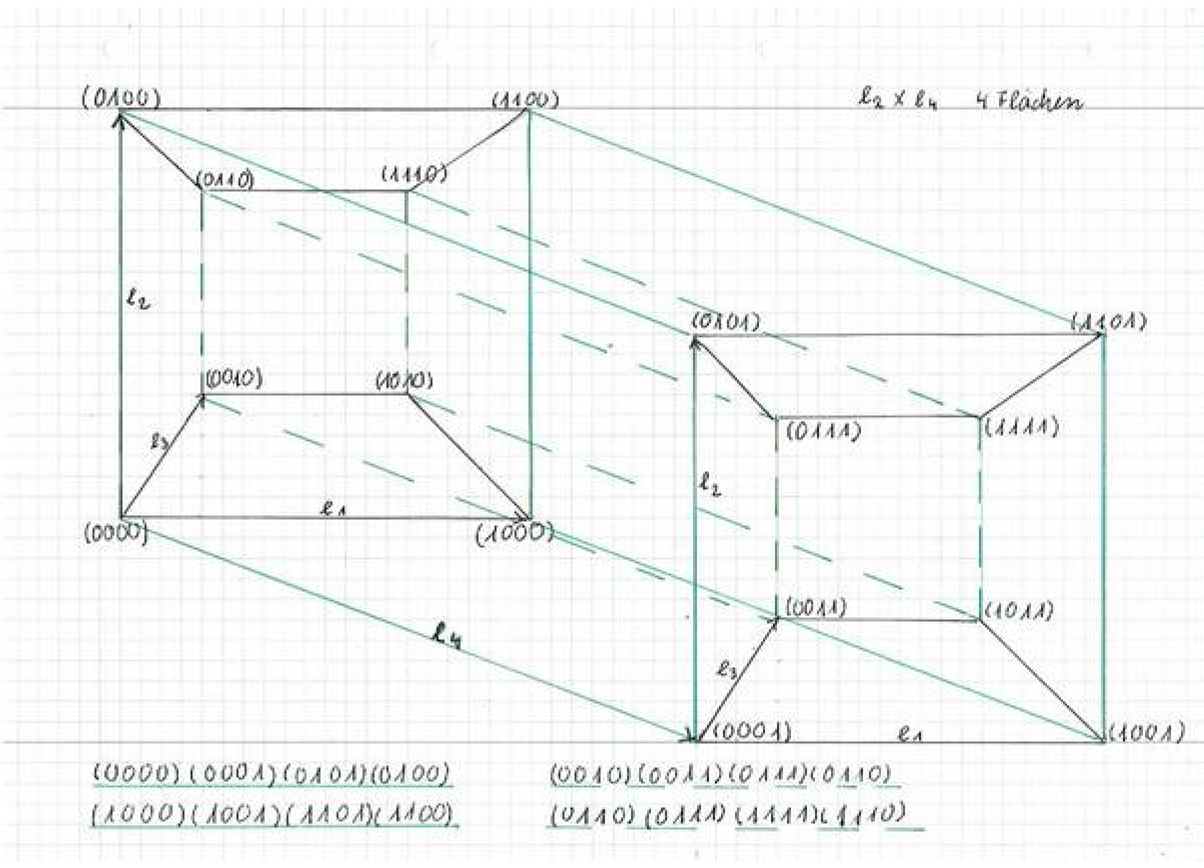
- die 6 Würfel werden von den 6 Quadraten des Würfels [(0,0,0,0),< e_1 e_2 e_3, >] jeweils zusammen mit e_4 gebildet -.

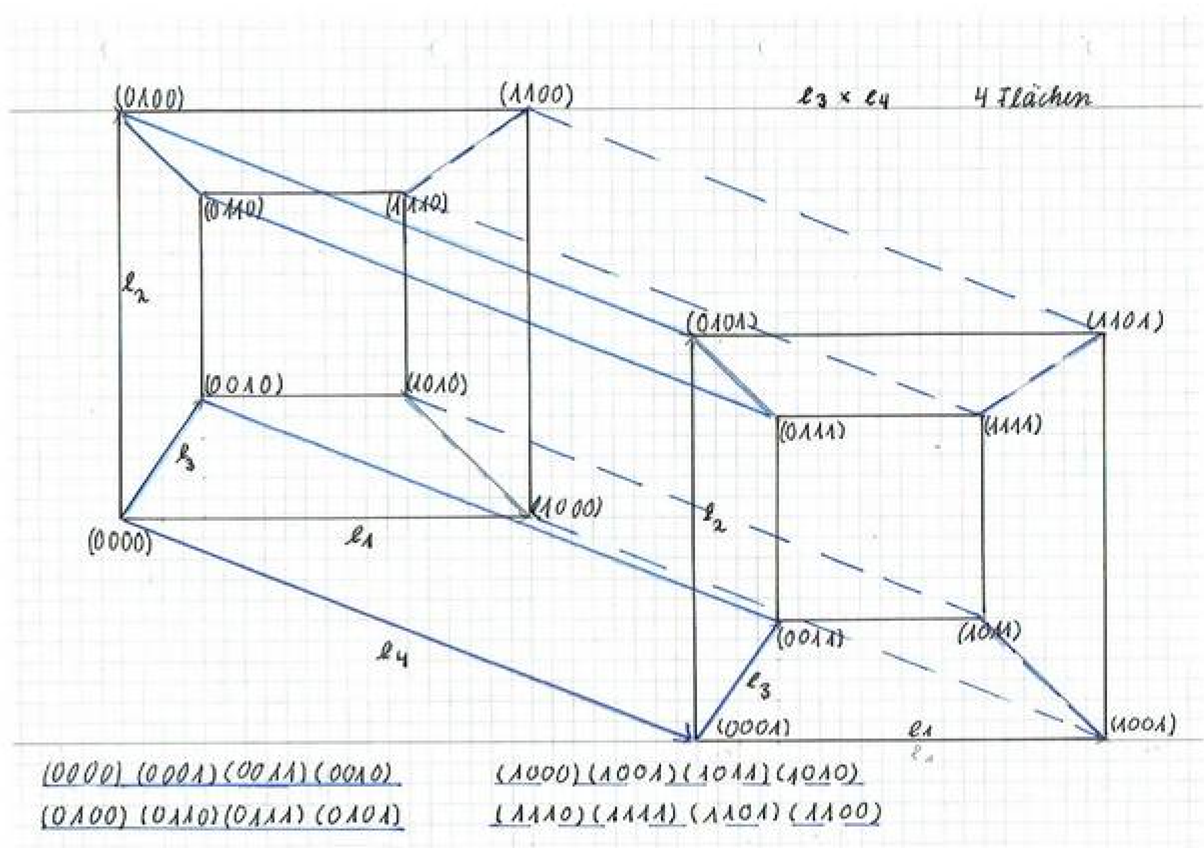
Die Verdoppelung der 8 Punkte, 12 Kanten, 6 Quadrate bzw. des Würfels ergibt sich aus der durch e_4 bestimmten Translation des Würfels [(0,0,0,0),< e_1 e_2 e_3, >] in den Würfel [(0,0,0,1),< e_1 e_2 e_3, >]

Eine RE4 hat 8 Würfel.
2 Würfel sind [(0,0,0,0), <),< e_1 e_2 e_3, >], [(0,0,0,1),< e_1 e_2 e_3, >]
3 weitere Würfel mit dem Aufpunkt (0,0,0,0) sind
[(0,0,0,0),< e_1 e_2 e_4, >], [(0,0,0,0),< e_1 e_3 e_4, >], [(0,0,0,0),< e_2 e_3 e_4, >]
und die restlichen Würfel sind
[(0,0,1,0),< e_1 e_2 e_4, >], [(0,1,0,0),< e_1 e_3 e_4, >], [(1,0,0,0),< e_2 e_3 e_4, >]

Eine RE4 besteht aus 24 = 2^{4-2} (4über2) Quadraten. Je 6 Quadrate sind im Würfel [(0,0,0,0), < e_1 e_2 e_3, >] bzw. im Würfel {(0,0,0,1), <e_1 e_2 e_3, >] enthalten. Die 12 weiteren Quadrate sind in den Zeichnungen dargestellt.







Alternative Zählmethoden

Die Anzahlen a(4,1), a(4,2), a(4,3) ergeben sich in den Zeichnungen anhand des Rückgriffs der RE4 auf Anzahlen von Elementen des Würfels.
Die Anzahlen a(4,1), a(4,2), a(4,3) lassen sich auch rein punktuell basierend auf die $2^4 = 16$ Punkte der RE4 bestimmen.

a) Eine Kante im R^4 ist bestimmt durch eine 2-Punktmenge von Quadrupeln mit Koordinaten aus {0,1}, die in 3 Komponenten übereinstimmen und in einer variieren. Damit gibt es in der RE4 a(4,1) = $2^3\cdot$(4über1) = 32 Kanten.

b) Ausgehend von den 16 Punkten erhält man durch Antragen eines Einheitsvektors an jeden der Punkte insgesamt diese $2^{4-1}\cdot$(4über1) verschiedene Kanten (jede Kante wird zweifach erzeugt), wobei der Einheitsvektor negativ gerichtet ist, wenn er in der Darstellung des Aufpunktes durch eine am Ursprung angetragene Vektorsumme als Summand vorkommt.

a) Ein Quadrat im R^4 ist bestimmt durch eine 4-Punktmenge von Quadrupeln mit Koordinaten aus {0,1}, die in 2 Komponenten übereinstimmen und in 2 variieren. Damit gibt es in der RE4 a(4,2) = $2^2\cdot$(4über2) = 24 Quadrate.

b) Man erhält durch Antragen der durch ein 2-Bein erzeugten Vektoren an jeden der Punkte insgesamt diese a(4,2) = $2^{4-2}\cdot$(4über2) verschiedene Quadrate (jedes Quadrat wird vierfach erzeugt).
Vektoren der angetragenen Summe, die im Aufpunkt vorkommen, haben ein negatives Vorzeichen.

a) Ein Würfel im R^4 ist bestimmt durch eine 8-Punktmenge von Quadrupeln mit Koordinaten aus {0,1}, die in 1 Komponente übereinstimmen und in 3 variieren. Damit gibt es in der RE4 a(4,3) = 2·(4über3) = 8 Würfel.

b) Man erhält durch Antragen der durch ein 3-Bein erzeugten Vektoren an jeden der Punkte insgesamt diese $a(4,3) = 2^{4-3}\cdot$(4über3) verschiedene Würfel (jeder Würfel wird achtfach erzeugt).
Vektoren der angetragenen Summe, die im Aufpunkt vorkommen, haben ein negatives Vorzeichen.

Rekursive Abhängigkeit der a(n,k) von den Anzahlen a(n-1,k) und a(n-1,k-1)

Wir schreiben a(n,k), $0 \le k \le n$, für die Anzahl der k-dimensionalen Elemente im n-dimensionalen kartesischen Vektorraum R^n.

$a(0,0) = 1$	1 Punkt
$a(1,0) = 2$	2 Punkte
$a(1,1) = 1$	1 Kante
$a(2,0) = 2^2$	4 Punkte
$a(2,1) =$ (2über1)$\cdot 2^{2-1} = 2a(1,1) + a(1,0)$	4 Kanten
$a(2,2) = 1$	1 Quadrat
$a(3,0) = 2^3$	8 Punkte
$a(3,1) =$ (3über1)$\cdot 2^{3-1} = 2a(2,1) + a(2,0)$	12 Kanten
$a(3,2) =$ (3über2)$\cdot 2^{3-2} = 2a(2,2) + a(2,1)$	6 Quadrate
$a(3,3) = 1$	1 Würfel
$a(4,0) = 2^4$	16 Punkte
$a(4,1) =$ (4über1)$\cdot 2^{4-1} = 2a(3,1) + a(3,0)$	32 Kanten
$a(4,2) =$ (4über2)$\cdot 2^{4-2} = 2a(3,2) + a(3,1)$	24 Quadrate
$a(4,3) =$ (4über3)$\cdot 2^{4-3} = 2a(3,3) + a(3,2)$	8 Würfel
$a(4,4) = 1$	1 RE4

Allgemein:

$a(n,k) =$ (n über k)$\cdot 2^{n-k}$
$a(n,k) = 2a(n-1,k) + a(n-1,k-1)$ für $n > 1$

Es ist
$2a(n-1,k) + a(n-1,k-1) = 2((n-1)\text{über } k)2^{n-1-k} + ((n-1)\text{über}(k-1))2^{n-1-(k-1)}$
$= 2^{n-k}(((n-1)\text{über} k) + ((n-1)\text{über}(k-1)) = 2^{n-k}$ (n über k)

Die binomische Entwicklung von $(2+1)^n$ für n = 0, 1, 2, ... (s. Seite 3) ergibt sich folgendes Dreieck

$(2+1)^0$	1
$(2+1)^1$	$2 \quad 1$
$(2+1)^2$	$2^2 \quad 2\cdot 2 \quad 1$
$(2+1)^3$	$2^3 \quad 3\cdot 2^2 \quad 3\cdot 2 \quad 1$
$(2+1)^4$	$2^4 \quad 4\cdot 2^3 \quad 6\cdot 2^2 \quad 4\cdot 2^1 \quad 1$
$(2+1)^5$	$2^5 \quad 5\cdot 2^4 \quad 10\cdot 2^3 \quad 10\cdot 2^2 \quad 5\cdot 2 \quad 1$

ausgerechnet

1					
2	1				
4	4	1			
8	12	6	1		
16	32	24	8	1	
32	80	80	40	10	1

Die Zahlen in der n-ten Zeile sind die Anzahlen der Elemente der Dimension k in der Raumeinheit n, $0 \le k \le n$.
Der linke Schenkel des Dreiecks gibt die Anzahl der Punkte 2^n im R^n an, der rechte Schenkel gibt die Anzahl der RE n im R^n an, n = 1,2,3,... .
Multipliziert man nun jeweils zwei aufeinanderfolgende Zahlen einer Zeile komponentenweise mit (1,2) und addiert die Produkte, so ergeben sich die nicht auf dem Rand liegenden Zahlen der nächsten Zeile.

Anhand der binomischen Entwicklung von $(2 - 1)^n$ (s. Seite 3) zeigt sich hier die Bildung eines „Euler Charakteristik Dreiecks“.

1					
2	-1				
4	-4	1			
8	-12	6	-1		
16	-32	24	-8	1	
32	-80	80	-40	10	-1